

# LATEORÍA DE LA DEMANDA DE MARSHALL: UNA APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

ÁLVAREZ VÁZQUEZ, NELSON J.  
PÉREZ PASCUAL, PEDRO A.  
RODRÍGUEZ RUIZ, JULIÁN

UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
EDUCACIÓN A DISTANCIA

---

## RESUMEN

La comunicación trata de resaltar la aportación de los economistas matemáticos al análisis económico. Para ello se centra en la figura de Alfred Marshall y en el tratamiento que hizo de la ley de la demanda así como del concepto de elasticidad. Asimismo se subraya el método de trabajo caracterizado por el empleo de la cláusula *ceteris paribus*.



## 1.- Introducción

El propósito de este trabajo es aproximarse a la ley de la demanda tal como Alfred Marshall la estableció en sus Principios de Economía, publicados en 1890, resaltando al mismo tiempo el empleo que el autor hizo de las matemáticas para desarrollar conceptos teóricos que otros autores habían establecido antes, si bien en un lenguaje más discursivo. Con ello se pretende poner de relieve la trascendencia de los economistas matemáticos al proporcionar a la ciencia económica, un instrumento riguroso de análisis como es el lenguaje matemático, que permite manejar los conceptos económicos sin ambigüedad.

Marshall estaba especialmente capacitado para llevar a cabo esta tarea, pues era matemático antes que economista (entendiendo *antes* sólo en sentido temporal). Debido precisamente a su superior formación en este campo, practicó con mucha mayor precaución la economía matemática, al ser plenamente consciente de los abusos a que podía dar lugar.

Para ilustrar la aplicación de las matemáticas al análisis económico, se estudia en esta comunicación el tratamiento que Marshall realizó de la ley de la demanda y del concepto de elasticidad. Aunque no es fácil extraer de una obra tan densa, a pesar de la aparente sencillez con que está escrita, las ideas fundamentales que hacen referencia a aquellos conceptos, se intenta ofrecer aquí lo más relevante a juicio de los autores.

## 2.- La ley de la demanda

Para fundamentar la Teoría de la Demanda, Marshall, tras señalar la relación entre la satisfacción de los deseos humanos y las actividades, establece (Capítulo 3, pág. 78) que "*El regulador último de toda la demanda es la demanda de los consumidores*". Es decir, puede haber demandas que no sean específicamente de los consumidores, esto es, demandas de comerciantes o industriales, pero en último término, dichas demandas están reguladas por la demanda de aquellos. Por ello, el estudio de la Teoría de la Demanda se centra en el análisis de la demanda de los consumidores.

A continuación señala que la utilidad es un concepto estrechamente relacionado con el de necesidad o satisfacción de los deseos. O sea, una cosa es útil debido a que posee la capacidad de satisfacer un deseo o una necesidad. Aunque las necesidades pueden ser muy variadas, todas tienen en común el hecho de que tienen un límite, son saciables. Es lo que se conoce como *ley de las necesidades saciables*. Esta ley se refiere en definitiva a la *utilidad total* y establece que, aunque ésta aumenta con cada nueva adición de la cosa al stock poseído por el sujeto, cada vez lo hace en menor proporción. Marshall denomina a la última unidad de la cosa que el sujeto compra, *compra marginal* y la utilidad derivada de esta compra marginal es denominada *utilidad marginal*. De manera que la ley anterior puede ahora enunciarse de la siguiente forma:



*"La utilidad marginal de una cosa para cualquier persona, disminuye con cada incremento en la cantidad de esa cosa que ya posee" (p. 79, oc)*

Esta es la expresión de la conocida ley de la utilidad marginal decreciente. Aquí Marshall cita a varios autores que de una u otra forma, han utilizado con anterioridad el concepto de utilidad marginal. Los citados son Gossen, Jevons, Wieser y Wicksteed. Además señala que dicha ley lleva implícita la condición de que no hay tiempo suficiente para la alteración de los gustos del sujeto en cuestión.

Marshall reformula ahora la ley de la utilidad marginal decreciente en términos del precio, para concluir que el precio que se paga en el mercado por una determinada cosa, es la medida de la utilidad marginal de esa cosa para el individuo, y se denomina *precio de demanda marginal*. El razonamiento, referido al mercado del té, donde Marshall fundamenta esta afirmación, es el siguiente:

*"Al precio actual (2 chelines/libra), esa persona compra quizá diez libras al año, es decir, que la diferencia entre la satisfacción que obtiene al comprar nueve y diez libras, es la suficiente para que esté dispuesta a pagar dos chelines por ella, mientras que el hecho de que no compre una undécima libra, demuestra que no cree que valga para ella otros dos chelines más; es decir que dos chelines la libra es la medida de... la utilidad marginal para ella. Si denominamos **precio de demanda** el precio que está dispuesto a pagar por libra, entonces dos chelines será su **precio de demanda marginal**" (o.c., pág. 83)*

Si el precio de demanda mide la utilidad marginal, entonces la ley de la utilidad marginal decreciente puede formularse diciendo que el precio (=utilidad marginal) que el individuo está dispuesto a pagar por la cosa, disminuirá con cada aumento de la cantidad de la cosa poseída por el consumidor o, como dice Marshall:

*"Cuanto mayor sea la cantidad de una cosa que una persona posea, tanto menor será, si las demás cosas no varían (es decir si el poder adquisitivo del dinero y la cantidad disponible del mismo no se alteran), el precio que pagará por una cantidad adicional de dicha cosa, o en otros términos, el precio de demanda marginal disminuirá" (o.c. pág 83)*

La referencia a la constancia de la utilidad marginal del dinero, demuestra que fue consciente de este problema. Un poco más adelante señala que, siempre que dicha utilidad marginal permanezca constante, los precios que una persona estaría dispuesta a pagar por dos mercancías, estarían en la misma proporción que las utilidades de aquellas<sup>1</sup>.

Marshall señala que podríamos obtener un conocimiento más completo de la demanda de una mercancía, si pudiesemos construir lo que llama, *lista de demanda*, que no sería sino una lista de los precios que una persona está dispuesta a pagar por diversas cantidades de dicha mercancía. Esta lista podría representarse en un gráfico y obtener así la curva de demanda.

El último paso en la construcción de la ley de la demanda, es pasar de la demanda

---

<sup>1</sup> Lo que viene a ser la conocida regla equimarginal:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{UM_x}{UM_y}$$



individual a la demanda agregada o colectiva. Esta demanda agregada se obtiene por simple suma de las demandas individuales de cada sujeto y, al ser la suma de las demandas de muchos individuos, se ajustará mejor a las variaciones en el precio, obviando aquellos casos en los que la demanda individual pudiera ser discontinua (relojes, automóviles...). Marshall escribe:

*“En los grandes mercados, en los cuales aparecen mezclados conjuntamente ricos y pobres, viejos y jóvenes, hombres y mujeres, personas de todas las variedades de gustos, temperamentos y ocupaciones, las peculiaridades en las necesidades de los individuos se compensaran unos con otros en una gradación relativamente regular de la demanda total. Cada caída en el precio de una mercancía de uso general aumentará, permaneciendo igual todas las demás cosas, las ventas totales de la misma, del mismo modo que un otoño insalubre aumenta la mortalidad de una gran ciudad, aunque muchas personas no sufran daños por ello” (o.c. pág. 86)*

De manera que la demanda agregada se construye por suma horizontal de las demandas individuales.

Por fin Marshall puede concluir estableciendo la ley de la demanda:

*“Existe pues una **ley general de la demanda** que puede expresarse así: cuanto mayor es la cantidad que ha de venderse, tanto menor debe ser el precio a que se ofrecerá para que pueda encontrar compradores; o en otros términos, la demanda aumenta cuando el precio baja y disminuye cuando el precio sube... Así pues, la única regla universal a que se sujeta la curva de demanda, es la de que tiene una pendiente negativa en todos sus puntos” (o.c. pág 87)*

Marshall reconoce a continuación que antes de poder construir la lista de demanda, deben establecerse una serie de supuestos:

*"Los precios de demanda de nuestra lista son aquellos a los que varias cantidades de una cosa pueden venderse en un mercado durante un tiempo determinado y bajo condiciones dadas".(o.c. pág. 87.)*

Es decir, existe una relación precio-cantidad demandada, bajo determinadas condiciones. Si éstas se alteran, la relación cambiará. Para estudiar este problema ALFRED MARSHALL aplicó, como en el caso de los costes, el método *ceteris paribus*, haciendo que aquellas condiciones permaneciesen constantes, y aislando así la relación entre el precio y la cantidad demandada.

Los supuestos *ceteris paribus* al considerar la relación funcional entre precio y cantidad, son:

- 1.- El periodo de tiempo necesario para el ajuste.
- 2.- Los gustos preferencias y costumbres del sujeto.
- 3.- La cantidad de dinero (renta o riqueza) de que dispone el sujeto.
- 4.- El poder adquisitivo del dinero.
- 5.- El precio y la calidad de las mercancías rivales



Considerando todos éstos constantes, Marshall deduce la ley de la demanda.

En cuanto al desarrollo matemático de la argumentación, que Marshall relegó a apéndices y notas a pie de página a pesar de su cuidada elaboración, señala en su apéndice matemático, que la condición de equilibrio para la demanda del bien  $x$  puede expresarse como:

$$\frac{MU_x}{P_x} = MU_d \quad (1)$$

es decir, la utilidad marginal derivada del bien  $x$  ponderada por su precio, ha de ser igual a la utilidad marginal del dinero (ponderada por el suyo, pero el precio del dinero es la unidad). Aplicada a todos los bienes que adquiere el consumidor, ésta es la conocida regla equimarginal<sup>2</sup>:

$$\frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} = \dots = \frac{MU_z}{P_z} = MU_d \quad (2)$$

Para mayor sencillez centremos nuestra atención en la expresión (1), o en su equivalente:

$$MU_x = p_x MU_d$$

Consideremos un consumidor cualquiera y supongamos que la demanda del bien  $x$  por parte del dicho consumidor, cumple la condición anterior por lo que se encuentra en equilibrio. En estas condiciones si baja el precio del bien  $x$ , la igualdad anterior se transforma inmediatamente en una desigualdad. Ahora:

$$MU_x > p_x MU_d$$

Puesto que Marshall considera constante la  $MU_d$  (o.c., pág 83), la restitución del equilibrio exige que disminuya la utilidad marginal del bien  $x$ . Para ello el consumidor habrá de comprar más unidades del bien  $x$ , ya que de acuerdo con la Teoría de la Utilidad, concretamente con la ley de la utilidad marginal decreciente, dicha utilidad disminuirá a medida que compremos más cantidad de ese bien. La teoría de la demanda marshaliana

---

<sup>2</sup> La obtención de esta condición es simplemente un problema de máximos condicionados. Por ejemplo, para el caso de dos bienes,  $x$  e  $y$ , se trata de maximizar la utilidad del consumidor, que es función de dichos bienes  $U = U(x, y)$ , condicionado a su renta,  $Y = xp_x + yp_y$ . Formando la función auxiliar de Lagrange:

$$L = U(x, y) - \Phi(Y - xp_x - yp_y)$$

Y maximizando respecto a  $x$  e  $y$ , encontraremos que:

$$MU_x/p_x = MU_y/p_y$$



postula así, que el consumidor demandará mayores cantidades de un bien concreto a medida que disminuya su precio. En Teoría microeconómica esto se conoce con el nombre de efecto sustitución. Gráficamente:

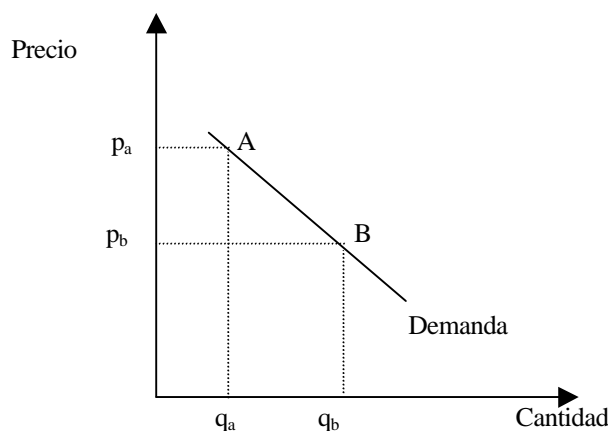


GRÁFICO 1. Curva de demanda

Nos encontramos en equilibrio en un punto como el A, con un precio  $p_a$  y una cantidad  $q_a$ , situación para la que se cumple la condición de equilibrio,  $MU_x = p_x MU_d$ . Pero en un momento dado el precio cae hasta  $p_b$ . De acuerdo con el razonamiento anterior, debemos comprar más unidades del bien x, reduciendo así su utilidad marginal hasta volver a conseguir restablecer la condición de equilibrio. En el gráfico esa condición vuelve a restablecerse en B, donde al precio  $p_b < p_a$ , se demanda una cantidad  $q_b > q_a$ . Uniendo los puntos A y B obtendremos la curva de demanda, con pendiente negativa tal como Marshall postuló.

### 3.- Elasticidad

Después de haber establecido la ley general de la demanda, relacionando cantidades demandadas y precios, Marshall observa:

*“Hemos visto que la única ley universal relacionada con el deseo de una mercancía por parte de una persona, es aquella que establece que éste disminuye, en igualdad de circunstancias, con cada aumento de su provisión de dicha mercancía; pero esta disminución puede ser lenta o rápida. Si es lenta, el precio que la persona dará por la mercancía, no bajará mucho a causa de un aumento considerable en la provisión del mismo, y una pequeña bajada del precio causará un aumento comparativamente grande en las compras; pero si es rápida, una pequeña bajada del precio, sólo causará un aumento muy pequeño en sus compras. En el primer caso... la elasticidad de sus necesidades es grande... En el segundo... la elasticidad de su demanda es pequeña... Podemos, pues, decir de un modo general: la elasticidad de la demanda en un mercado es grande o pequeña, según que la cantidad demanda, aumente mucho o poco, frente a una disminución de precios dada, o decrezca poco o mucho frente a un alza dada de precios”* (Principios, pág. 86)

Tras establecer en el párrafo anterior el concepto de elasticidad de la demanda,



dedica todo el capítulo IV, a examinar cuidadosamente su casuística, con profusión de ejemplos y casos prácticos. Establece que la elasticidad es diferente en los distintos puntos de la curva de demanda y que, diferentes clases de artículos (de lujo, de primera necesidad, etc), presentarían elasticidades diferentes.

Como es costumbre en Marshall, la expresión analítica y las representaciones gráficas son postergadas a notas a pie de página y al apéndice matemático. En este último establece que la expresión de la elasticidad de la demanda es:

$$e = -\frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p}$$

En términos geométricos Marshall analiza la elasticidad de la demanda de la siguiente manera. Si la curva de demanda es, tT, como la de la figura 2:

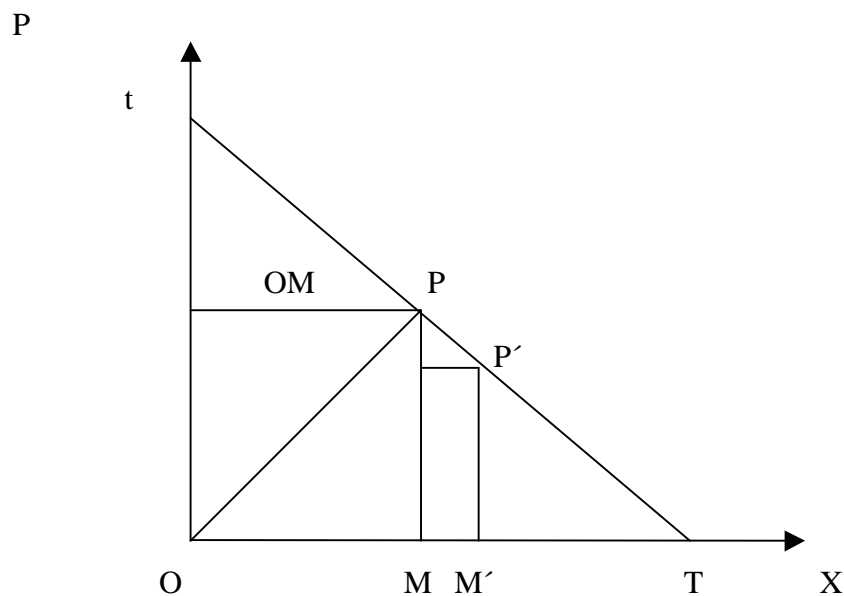


GRÁFICO 2. Elasticidad de la demanda

la elasticidad en el punto P, vendrá dada por el incremento relativo de X, dividido entre el incremento relativo de P:

$$e = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta X}{\Delta P} \cdot \frac{P}{X}$$

tal como corresponde a la definición de elasticidad en términos discretos. Pero en el gráfico anterior, esta igualdad se transforma en:

$$e = \frac{P'R}{OM} \div \frac{PR}{PM} = \frac{P'R}{PR} \cdot \frac{PM}{OM} = \frac{TM}{PM} \cdot \frac{PM}{OM} = \frac{TM}{OM} = \frac{PT}{Pt}$$



donde el paso de una a otra igualdad se justifica en virtud de la semejanza de triángulos, tal como puede comprobarse en la figura 2. De manera que la elasticidad de la demanda en un punto, viene determinada por la relación entre el segmento limitado por ese punto y el eje de abscisas y el segmento limitado por el punto y el eje de ordenadas. Por tanto, en el caso de una curva de demanda lineal, la elasticidad sería infinita en el punto de corte con el eje de ordenadas, pasaría a ser elástica, aunque iría disminuyendo hasta hacerse unitaria en algún punto central de la curva (donde  $PT=P_t$ ), después sería rígida y terminaría anulándose en el punto de corte con el eje de abscisas.

El análisis de la elasticidad de la demanda, es interesante en muchos aspectos. Por ejemplo, pueden obtenerse importantes conclusiones, en el estudio del gasto de los compradores o ingreso de los vendedores. Así, en una situación como la de la figura 3:

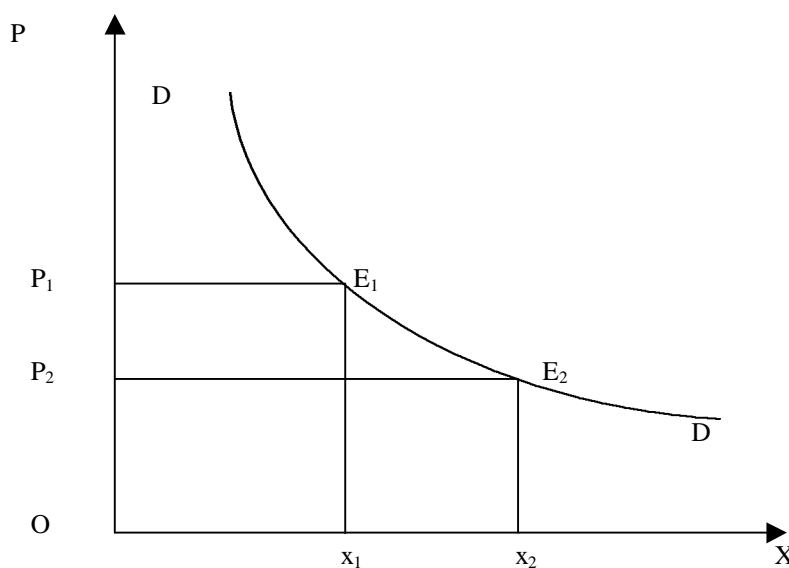


GRÁFICO 3.

según la curva de demanda, se están intercambiando  $x_1$  unidades al precio  $p_1$ . Al empresario podría interesarle el efecto sobre los ingresos totales de una reducción del precio. Es decir, si el precio cae hasta  $p_2$ , es evidente que se venderán más unidades, pero el ingreso total ¿aumentará o disminuirá en las nuevas condiciones? O en otras palabras, el área del rectángulo  $OP_2E_2x_2$ , ¿será mayor o menor que la del rectángulo  $OP_1E_1x_1$ ?

Todo ello depende enteramente de la elasticidad de la demanda en el punto de partida. Es decir, en función de si la demanda es mayor, menor o igual a uno, el ingreso de los oferentes, crecerá, decrecerá o permanecerá constante.

En efecto, si la elasticidad es mayor que la unidad, ello quiere decir:

$$e = \frac{\frac{\Delta X}{X}}{\frac{\Delta P}{P}} > 1$$



o lo que es lo mismo, el incremento en la cantidad vendida será mayor que el decremento experimentado por el precio, con lo que el ingreso  $I = p.x$ , aumentará. Siguiendo un razonamiento análogo, podemos concluir que el ingreso disminuirá si la elasticidad es menor que la unidad y que permanecerá constante si es igual a la unidad.

Puesto que la elasticidad es variable a lo largo de la curva de demanda, el ingreso variará de forma distinta al variar el precio, según el punto de dicha curva donde nos encontremos. Y si la elasticidad, en una curva de demanda típica, comienza siendo mayor que la unidad (infinita en el caso de una demanda lineal), desciende hasta llegar a un punto donde se hace unitaria, y luego se convierte en rígida, esto quiere decir que, situados al principio de la curva de demanda, donde  $\gamma > 1$ , el ingreso total aumenta a medida que vamos disminuyendo el precio, hasta llegar al punto en que  $\gamma = 1$ , y a partir de ahí disminuye. O lo que es igual, *el ingreso total alcanza su máximo cuando la elasticidad de la demanda es igual a la unidad.*

La demostración matemática es elemental. Se trata de maximizar la función de ingreso,

$$I = p.x = f(x).x$$

La condición de máximo exige que se anule la primera derivada,

$$I' = x.f'(x) + f(x) = x.dp/dx + p,$$







O teniendo en cuenta la expresión de la elasticidad,

$$I' = p(1 - 1/\gamma) = 0$$

Igualdad que se cumple cuando  $\gamma = 1$ .



## BIBLIOGRAFÍA

-  PRINCIPIOS DE ECONOMÍA. A. Marshall. Ed. Aguilar, 4ª edición. 1963.
-  TEORÍA ECONÓMICA EN RETROSPECCIÓN. Mark Blaug. Ed. Fondo de Cultura Económica. 1985.
-  DIEZ GRANDES ECONOMISTAS DE MARX A KEYNES. J. A. Schumpeter. Ed. Alianza. 1990.
-  HISTORIA DEL PENSAMIENTO ECONÓMICO. W. J. Barber. Alianza Universidad. 1995.
-  EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ECONÓMICO. H. W. Spiegel. Ed. Omega. 1991.
-  ALFRED MARSHALL. Carlos Rodríguez Braun. Ed. Pirámide. 1996.